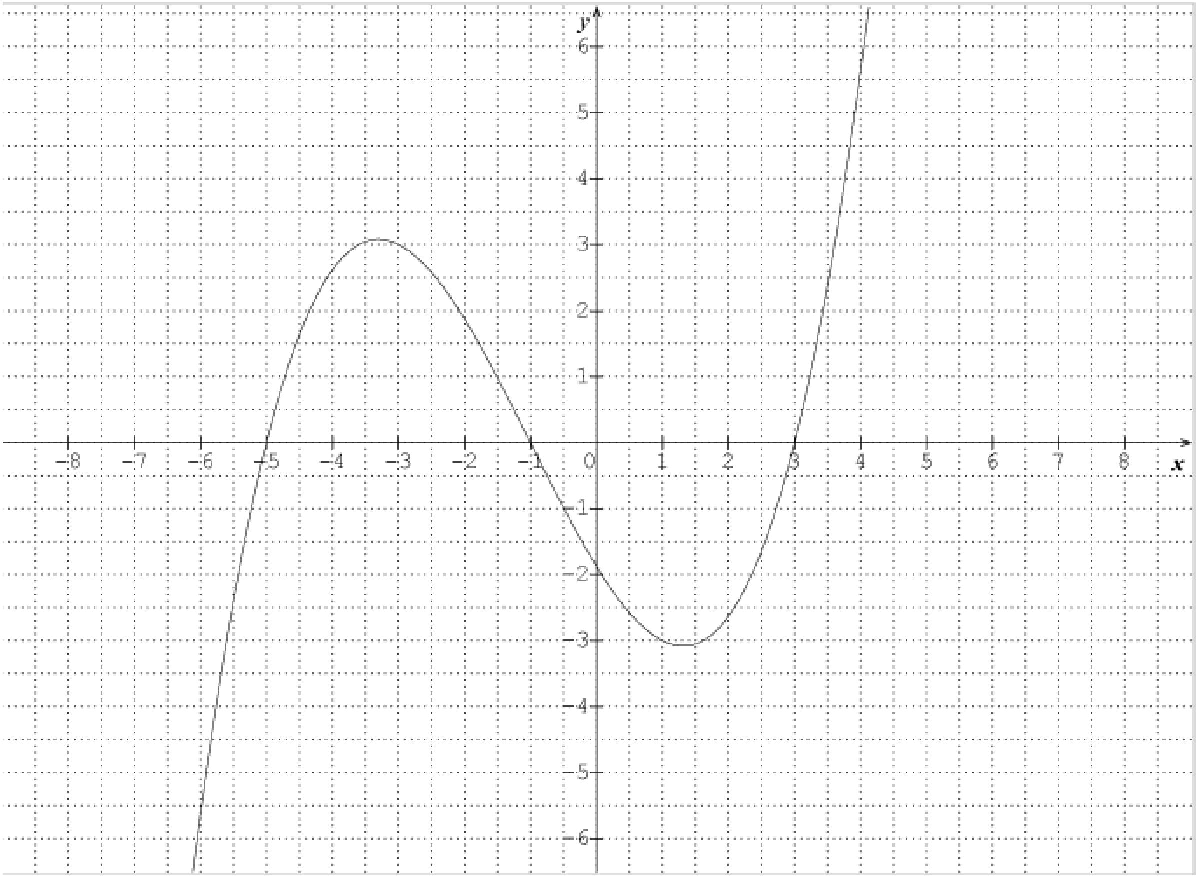
Généralités sur les fonctions
Devoir surveillé

Exercice 1 : 4 points

On a représenté sur la figure de la présente page la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Tracer les courbes des fonctions suivantes :

- $u = f + 2$;
- $v = -2f$;
- $w(x) = f(x+3)$;
- $z = |f|$.



Exercice 2 : 4 points

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |2x - 1| + |x + 3|$

1. Ecrire une expression simple de f en discutant suivant les valeurs de x.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
3. Résoudre l'équation $f(x) = 4$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : 6 points

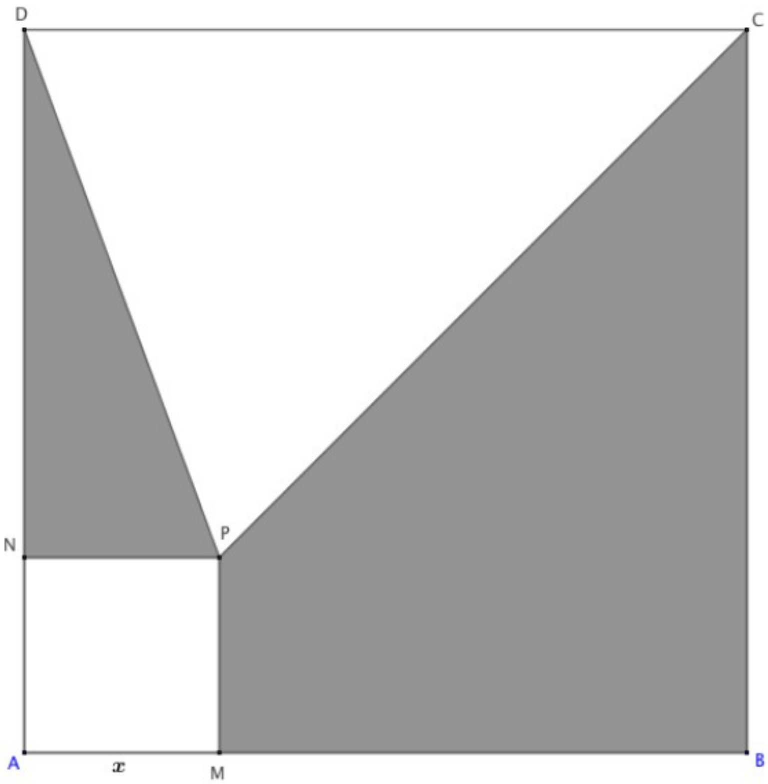
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x - 1$

- Quelles sont les variations de $x \to x^3$ sur $\mathbb{R}$?
- Quelles sont les variations de la fonction $x \to 2x - 1$ sur $\mathbb{R}$?
- En déduire en le démontrant les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
- Recopier et compléter le tableau de valeurs suivants (arrondir au centième)

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)									

- Représenter f sur [-2 ;2] dans un repère orthogonal (unités 1 cm pour 1 unité en abscisse et 1 cm pour 4 unités en ordonnées)

Exercice 4 : ABCD est un carré de 10 cm de côté et AMPN un carré de côté x tel que x appartient à l'intervalle $I = [0 ; 10]$.
On désigne par $S(x)$ l'aire, en cm^2, de la partie grise.



1) Exprimer l'aire du carré AMPN puis celle du triangle CDP en fonction de x.

2) En déduire que pour tout nombre x de I :
$S(x) = - x^2 + 5x + 50$.

3) Pour quelle valeur de x l'aire $S(x)$ est-elle maximale ? Que vaut alors cette aire ?

4) Pour quelles valeurs de x l'aire $S(x)$ est inférieure ou égale à l'aire du carré AMPN?

(4 points)

Exercice 5 :   Question 3 figure 1, le reste en bonus

Étude de la figure 1
Le graphique ci contre représente une fonction f définie sur $[-3 ; 3]$
1) Résoudre $f(x) < 0$
2) Résoudre $f(x) > 1$
3) On note g la fonction définie par $g(x) = x - 3$
a) Construire $\mathscr{C}_g$ sur le graphique ci contre
b) Résoudre $f(x) < g(x)$
4) Construire le tableau de variations de f.

Étude de la figure 2
Le graphique ci contre représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$
1) Résoudre $f(x) = 0$, $f(x) = 3$
2) Quels sont les antécédents de -4 par f ?
3) Déterminer l'image de 1 puis de -2 par f.
4) Construire le tableau de signes de f

figure 1

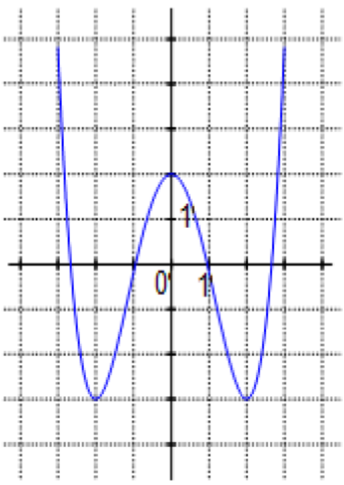
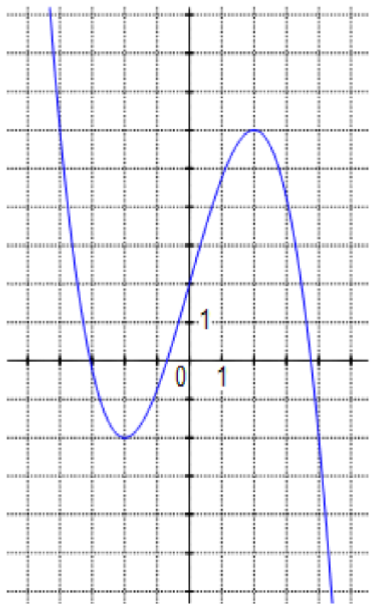


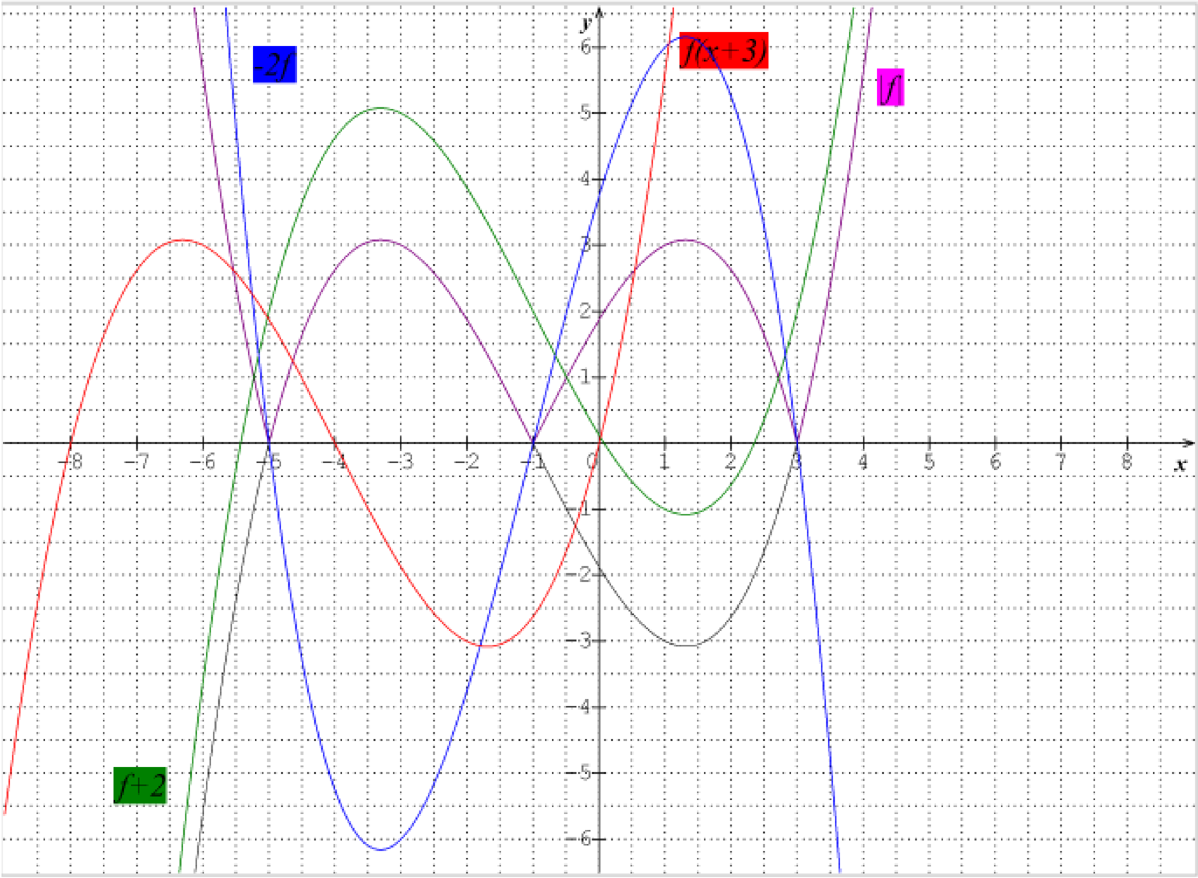
figure 2



(2 points)

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 correction simplifiée



Exercice 2 correction simplifiée

f(x) = |2x-1| + |x +3 |

x	-∞		-3		½		+∞
f(x)		-2x+1-x-3= -3x-2	7	-2x+1+x+3 = -x+4	7/2	2x-1+x+3 = 3x+2	
		Affine décroissante		Affine décroissante		Affine croissante	

x	-∞		-3		½		+∞
		↘	7	↘	7/2	↗	

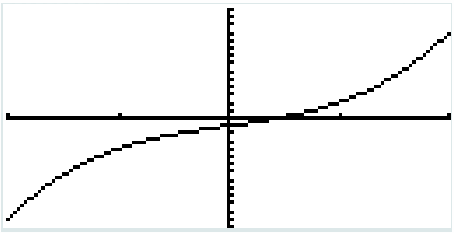
L'équation f(x) = 4 admet deux solutions l'une entre -3 et ½ et l'autre après ½

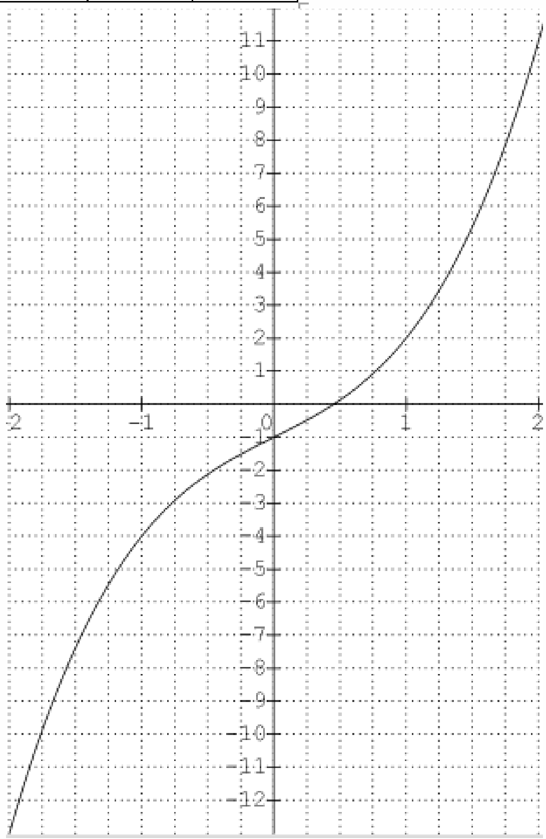
Pour celle entre -3 et ½ elle est évidente x = 0

Pour celle après ½ on a 3x+2 = 4 donc 3x = 2 d'où x = 2/3 qui ets bien dans l'intervalle considéré les solutions sont donc: 0 et 2/3

correction plus étendue en classe

X	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
F(x)	-13	-7.38	-4	-2.13	-1	0.13	2	5.38	11





Exercice 4 : 1) $\text{Aire}_{AMPN} = AM^2 = x^2$ et $\text{Aire}_{CDP} = \dfrac{DC \times DN}{2} = \dfrac{10 \times (10 - x)}{2} = 5\,(10 - x) = 50 - 5x$.

2) Pour tout nombre x de I : $S(x) = \text{Aire}_{ABCD} - \text{Aire}_{AMPN} - \text{Aire}_{CDP} = 100 - x^2 - (50 - 5x) = -x^2 + 5x + 50$.

3) Comme $a = -1$ est négatif, le trinôme $S(x)$ admet un maximum lorsque $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-5}{-2} = \dfrac{5}{2}$.

$S(\frac{5}{2}) = -(\frac{5}{2})^2 + 5 \times \frac{5}{2} + 50 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} + 50 = -\frac{25}{4} + \frac{50}{4} + \frac{200}{4} = \frac{225}{4} = 56{,}25.$

L'aire grise est maximale lorsque x vaut 2,5 cm et cette aire maximale est alors 56,25 cm².

4) Il faut résoudre $S(x) \leq x^2$, soit $-x^2 + 5x + 50 \leq x^2$, soit $-2x^2 + 5x + 50 \leq 0$.
Etudions le signe de ce nouveau trinôme : $\Delta = 425$. Comme Δ est positif, le trinôme a 2 racines et sera du signe de a, donc négatif, à l'extérieur de ses racines :
$x_1 = \dfrac{-5 - \sqrt{425}}{-4} = \dfrac{5 + 5\sqrt{17}}{4} \approx 6{,}4$ et $x_2 = \dfrac{-5 + \sqrt{425}}{-4} = \dfrac{5 - 5\sqrt{17}}{4} \approx -3{,}9$.

Comme $x_2 \notin I$, on obtient le tableau de signes suivant :

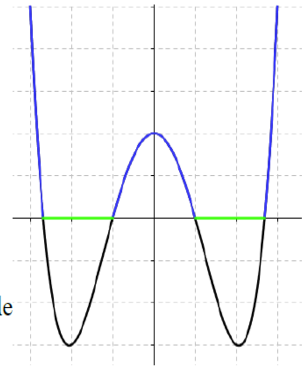
x	0		x_1		10
Signe de $-2x^2 + 5x + 50$	50	+	0		-100

L'aire $S(x)$ est inférieure ou égale à l'aire du carré AMPN pour $x \in [\dfrac{5 + 5\sqrt{17}}{4} ; 10]$

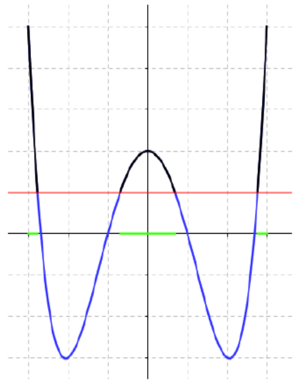
Exercice 5

Etude de la figure 1

Les résultats étant obtenus à partir du graphique, toutes les valeurs sont approchées.
Rappel : les points se trouvant sur la courbe ont des coordonnées $(x\,;\,y)$ telles que $y = f(x)$.



1) Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$, c'est déterminer les abscisses (valeurs de x) des points de la courbe ayant une ordonnée négative, c'est-à-dire les abscisses des points de la courbe se trouvant au-dessous de la droite d'équation $y = 0$ (axe Ox).
La partie de la courbe se situant au-dessous de l'axe Ox a été représentée en gras sur le dessin ci-contre.
L'inéquation $f(x) < 0$ a pour ensemble de solution : $S =]-2{,}7\,;-0{,}9[\cup]0{,}9\,;2{,}7[$.
Remarque : l'inéquation est une inéquation large (£), les bornes des intervalles sont donc des solutions (elle
L'ensemble des solutions est donc donné avec des intervalles fermés



2) Résoudre l'inéquation $f(x) > 1$, c'est déterminer les abscisses (valeurs de x) des points de la courbe ayant une ordonnée strictement supérieure à 1, c'est-à-dire les abscisses des points de la courbe se trouvant strictement au-dessus de la droite d'équation $y = 1$.
La partie de la courbe se situant au-dessus de la droite d'équation $y = 1$ a été représentée en gras sur le dessin ci-contre.
L'inéquation f(x) > 1 a pour ensemble de solution : $S = [-3\,;-2{,}8[\cup]-0{,}7\,;0{,}7[\cup]2{,}8\,;3]$.
Remarque : l'inéquation est une inéquation stricte ($>$), les bornes -2,8 ; $-0{,}7$; 0,7 et 2,8 ne sont donc pas des solutions .
Les intervalles sont donc ouverts en ces bornes.

3) On note g la fonction définie par $g(x) = x - 3$

a) Construction $\mathscr{C}_g$

On sait que la représentation graphique de la fonction g est une droite.
De fait il nous suffit de construire un tableau de valeurs comportant uniquement deux valeurs.

x	0	3
$g(x) = x - 3$	-3	0

b) Résolution de $f(x) < g(x)$

Résoudre l'inéquation $f(x) < x - 3$, c'est déterminer les abscisses (valeurs de x) des points de la courbe ayant une ordonnée inférieure à $x - 3$, c'est-à-dire les abscisses des points de la courbe se trouvant au-dessous de la droite d'équation $y = x - 3$.
La partie de la courbe se situant au-dessous de la droite d'équation $y = x - 3$ a été représentée en gras sur le dessin ci-contre.
Elle correspond à des valeurs de x appartenant à $]1{,}4\,;2{,}6[$
L'inéquation $f(x) < g(x)$ a pour ensemble de solution $]1{,}4\,;2{,}6[$.

4) On a le tableau de variations suivants

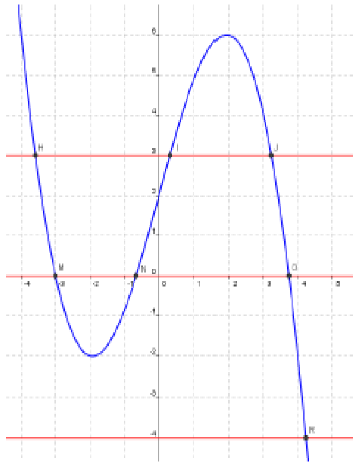
x	-3		-2		0		2		3
f	5	↘	-3	↗	2	↘	-3	↗	5

Étude de la figure 2
Le graphique ci contre représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, la courbe qui est tracée est donc une représentation graphique <u>partielle</u>.

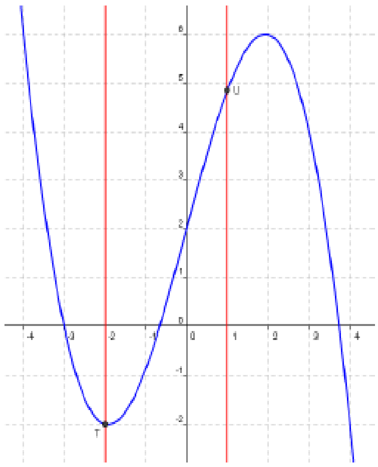
Les résultats sont donnés en supposant que f ne change pas de sens de variation en dehors des intervalles visibles sur le dessin. On suppose donc que f est décroissante sur $]-\infty\,;-2]$ et décroissante sur $[2\,;+\infty[$. Les résultats étant obtenus à partir du graphique, toutes les valeurs sont approchées.

1) Résoudre l'équation $f(x)=0$, c'est déterminer les abscisses (valeurs de x) des points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y=0$ (intersection de la courbe et de l'axe Ox des abscisses).
On peut remarquer graphiquement que la courbe a trois points d'intersection avec l'axe Ox.
Ces points ont pour abscisses respectives $-3{,}1$; $-0{,}7$ et 3,8.
L'équation $f(x)=0$ a donc trois solutions qui sont $-3{,}1$; $-0{,}7$ et 3,8 donc
$S=\{-3{,}1\,;-0{,}7\,;3{,}8\}$



Résoudre l'équation $f(x)=3$, c'est déterminer les abscisses (valeurs de x) des points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y=3$.
On trace donc la droite d'équation $y=3$ (c'est une droite parallèle à Ox).
On peut remarquer graphiquement que la courbe a trois points d'intersection avec cette droite.
Ces points ont des abscisses respectives à peu près égales à $-3{,}6$; 0,3 et 3,3.
L'équation $f(x)=3$ a donc trois solutions qui sont : $-3{,}6$; 0,3 et 3,3 donc $S=\{-3{,}6\,;0{,}3\,;3{,}3\}$

2) Résoudre l'équation $f(x)=-4$, c'est déterminer les abscisses (valeurs de x) des points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y=-4$.
On trace donc la droite d'équation $y=-4$ (c'est une droite parallèle à Ox)
On peut remarquer graphiquement que la courbe a un point d'intersection avec la droite.
Ce point a pour abscisse 4,2. L'équation $f(x)=-4$ a donc pour solution 4,2.



3) Déterminons l'image de 1 puis de -2 par f.
On peut lire que $f(1)=4{,}9$ et $f(-2)=-2$

4) Construction du tableau de signes de f

x	$-\infty$		$-3{,}1$		$-0{,}7$		$3{,}8$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	